Cálculo Numérico

Método de Fatoração LU

Prof. Flávio Murilo de Carvalho Leal
Centro Universitário de Juazeiro do Norte
Uninassau

A fatoração LU (Lower-Upper) de uma matriz quadrada A consiste em escrever:

$$A = LU$$

onde:

- L é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal principal;
- U é uma matriz triangular superior.

Essa decomposição é útil para resolver sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de forma eficiente, especialmente quando se deseja resolver o sistema para vários vetores $\mathbf{b}$.

Condições para a Existência da Fatoração LU

A fatoração LU existe e é única se todos os **menores principais líderes** de A forem não nulos, ou seja:

$$\det(A_k) \neq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

onde A_k é a submatriz principal de ordem k de A.
Se essa condição não for satisfeita, pode-se usar a **fatoração LU com pivoteamento parcial**, que envolve permutações de linhas:

$$PA = LU,$$

onde P é uma matriz de permutação.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, os elementos de $L = [\ell_{ij}]$ e $U = [u_{ij}]$ são obtidos por:

- Para $j = 1, \ldots, n$:
$$u_{1j} = a_{1j}$$
- Para $i = 2, \ldots, n$:
$$\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$
- Para $k = 2, \ldots, n$:
$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks} u_{sj}, \quad j = k, \ldots, n$$
$$\ell_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is} u_{sk} \right), \quad i = k+1, \ldots, n$$

Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vamos encontrar a fatoração $A = LU$.

Passo 1: Primeira linha de U e primeira coluna de L:

$$u_{11} = 2, \; u_{12} = 3, \; u_{13} = 1$$

$$\ell_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad \ell_{31} = \frac{6}{2} = 3$$

Passo 2: Segunda linha de U:

$$u_{22} = 7 - (2)(3) = 1, \quad u_{23} = 2 - (2)(1) = 0$$

Passo 3: Segunda coluna de L:

$$\ell_{32} = \frac{9 - (3)(3)}{1} = 0$$

Passo 4: Terceira linha de U:

$$u_{33} = 5 - (3)(1) - (0)(0) = 2$$

Logo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Com $A = LU$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é resolvido em duas etapas:

1. Resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (substituição direta):

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 0 \\ 3y_1 + 0y_2 + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Resolver $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (substituição retroativa):

$$\begin{cases} 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verificação: $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$